Date: / 04 / 2020

ANÁLISIS DE FUNCIONES

DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN REAL.

Dada una función $f: X \rightarrow Y$, se define el dominio de f (Dom f) como el conjunto de valores que puede tomar la variable X. El recorrido corresponde al conjunto de las imágenes de f (Rec f) y se refiere a los valores que puede tomar la variable Y.

Ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Dominio: Bien sabemos que en una expresión fraccionaria el denominador debe ser ***siempre distinto de cero*** (¿¿por qué??), entonces debemos asegurarnos de $x+1 \neq 0$, es decir $x \neq -1$, para determinar este último valor debes igualar el denominador a cero y luego despejar "x". Entonces

$$\text{Dom } f : \mathbb{R} - \{-1\}$$

Recorrido: Para encontrar el recorrido, debemos despejar la variable "x" de la función

$$y=\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{pasa multiplicando}} \Rightarrow y(x+1)=1 \Rightarrow xy+y=1 \Rightarrow xy=1-y$$

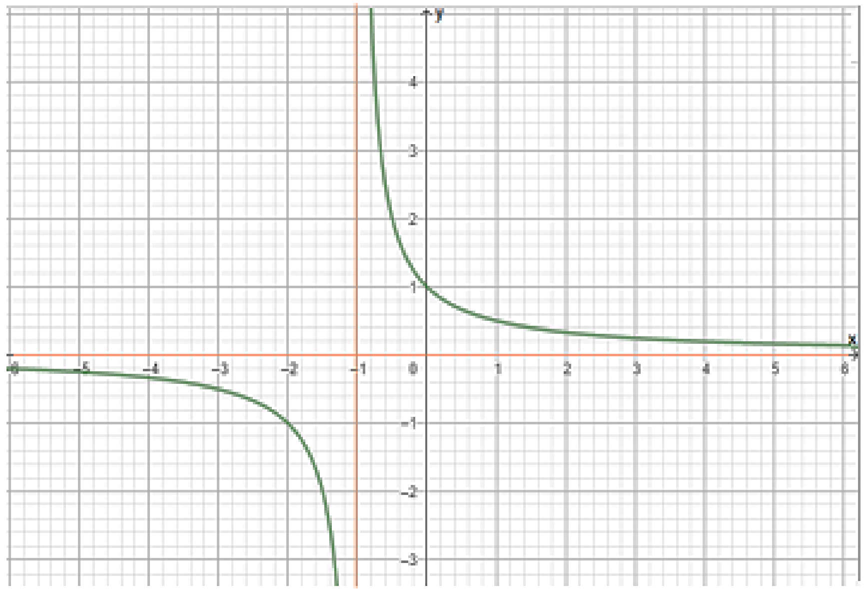
$$\therefore \quad x=\frac{1-y}{y}$$

Puesto que el denominador de una fracción es siempre distinto de cero, entonces

$$y \neq 0 \Rightarrow \text{Rec } f : \mathbb{R} - \{0\}$$

VEAMOS LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

Date: / 04 / 2020



En la gráfica se observa, a través de las líneas rojas, el Dominio y Recorrido de la función

$x \neq -1 \Rightarrow \text{Dom} f : R - \{-1\}$

$y \neq 0 \Rightarrow \text{Rec}\ f : R - \{0\}$

Se puede apreciar que las ramas de la hipérbola se acercan a **x = -1**, tanto por izquierda como por derecha, pero no la tocan. También lo hacen con **y = 0** , se acercan desde abajo y desde arriba y tampoco la tocan. Estas rectas (rojas) se llaman ASÍNTOTAS

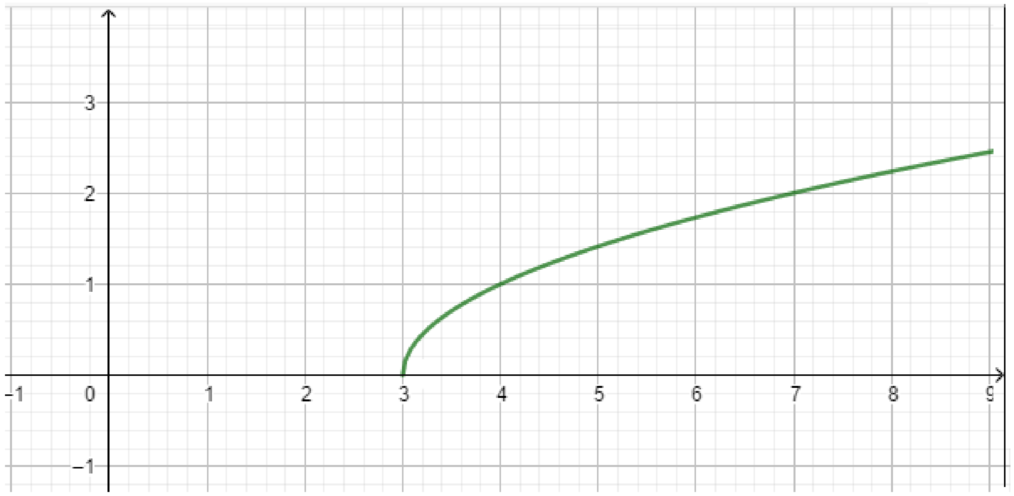
Ejemplo 2. Sea $f(x) = \sqrt{x-3}$

Dominio: Cómo toda raíz de índice par, estas no tienen no reconocen, en IR, una cantidad subradical negativa, es decir la expresión que se encuentra al interior de la raíz debe ser siempre mayor o igual a cero. $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$, así entonces el dominio será

$\text{Dom} f : \{x \in R / x \geq 3\}$, también se puede expresar $\text{Dom} f : [3, +\infty[$

Recorrido: Despejamos la variable "x" de la función

$y = \sqrt{x-3} \,/ (\ )^2 \Rightarrow y^2 = x - 3 \Rightarrow x = y^2 + 3$, se puede apreciar que no hay restricciones para "y" por lo que podría tomar todos los Reales, sin embargo, como en una función los elementos del dominio deben tener una única imagen, la raíz solo nos entrega el valor positivo, para cada valor de "x". Veamos su gráfica y podremos concluir que el recorrido de la función son solo reales positivos, más el cero.



De la gráfica se puede apreciar que:

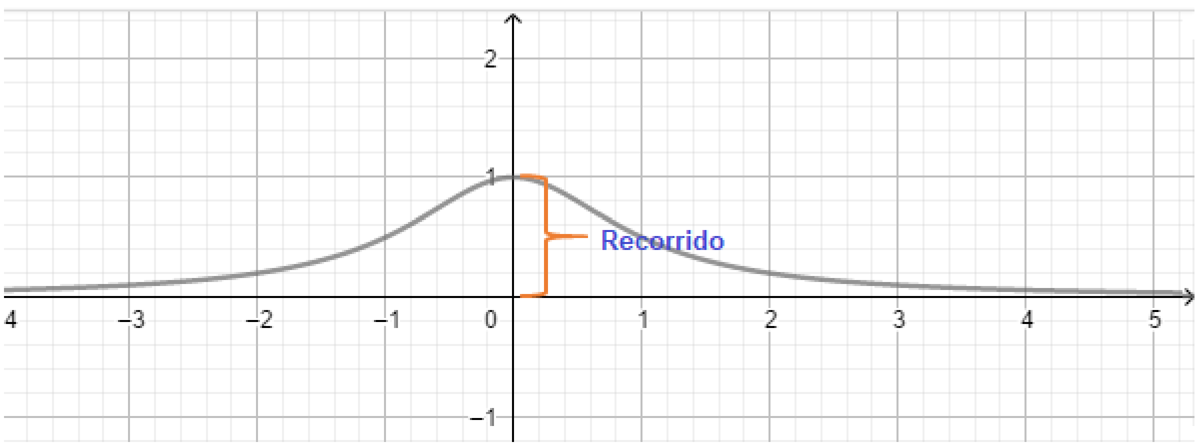
$\text{Dom}\, f : \{x \in R / x \geq 3\}$ y $\text{Rec}\, f : y \in \mathbb{R}_0^+$

Date: / 04 / 2020

EXISTEN FUNCIONES DONDE SE HACE MUY COMPLICADA LA OBTENCIÓN EL RECORRIDO, POR MÉTODOS ANALÍTICOS Y SU GRÁFICA NOS AYUDA A VISUALIZARLO.

Veamos algunos casos.

Caso 1, Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, se puede apreciar que el Dominio, serán todos los reales puesto que el denominador de la expresión "nunca" se hará cero, veamos su gráfica y comprobemos que el recorrido es muy restringido



Así entonces:

$$\mathrm{Dom}\,f:\mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{Rec}\,f:\left]0,1\right]$$

Caso 2, Sea la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 2$. con $\begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$

Como se puede observar es una función cuadrática, y como toda función polinómica, (su expresión algebraica es un polinomio de grado 2), su dominio es todos los Reales, puesto que no hay restricciones para los valores de x.

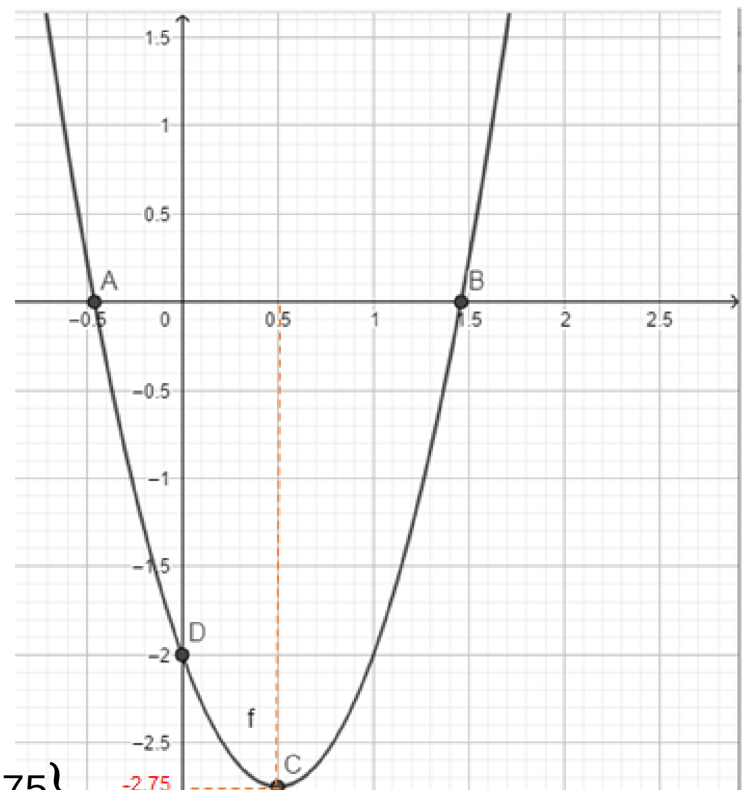
Para el caso del recorrido, despejar x se hace una tarea más complicada sin embargo, lo podemos deducir de la gráfica.

Vemos una parábola cóncava que:

- Intersecta al eje "x" en los puntos A y B
- Intersecta al eje "y" en el punto D
- Vértice es el punto C

Respecto del vértice, debemos recordar que
La coordenada "x" de este punto se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-3)}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \\ y_V = 3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right) - 2 = -2{,}75 \end{array}\right\} \Rightarrow V(0.5, -2{,}75)$$



Así entonces:

$$\mathrm{Dom}\, f : \mathbb{R} \quad ; \quad \mathrm{Rec}\, f : \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -2{,}75 \right\}$$

Date: / 04 / 2020

Caso 3, Sea la función $f(x) = -3 + 2^{(x+1)}$.

Puesto que una potencia no tiene restricciones para su exponente (no hay “peligro” de indeterminación), el dominio de la función es **Todos los Reales.**

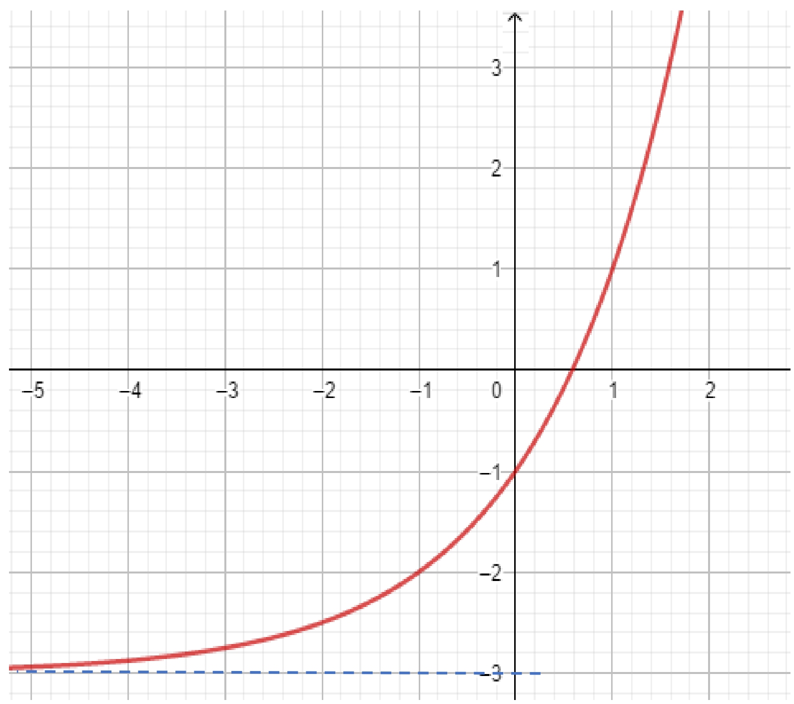
Ayudémonos con Geogebra, una vez más, y grafiquemos la función

Como vemos, la curva de la función se acerca a la recta y = - 3, pero no la “*toca*”, ¿nunca la curva se juntará con la recta y = - 3?

De la gráfica entonces se deduce que el

Recorrido, son todos los valores de “y”,

estrictamente mayores que - 3:



$$\text{Dom}\, f : \mathbb{R}$$
$$\text{Rec}\, f : \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, y > -3 \right\}$$

Date: / 04 / 2020

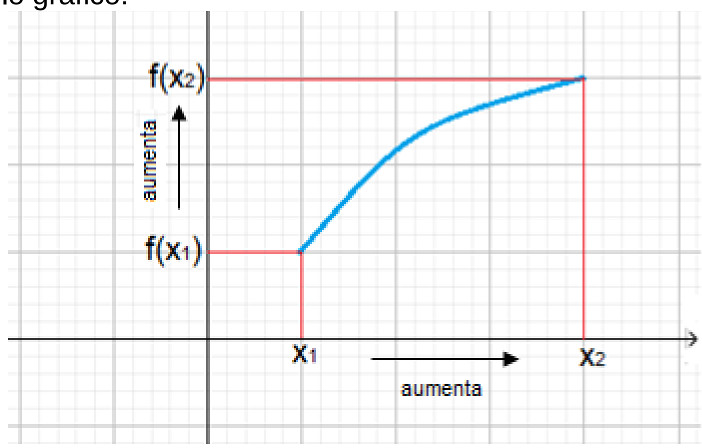
FUNCIÓN CRECIENTE

A medida que aumenta el valor de x, aumenta el valor de y.

Su definición es: **una función es creciente en un intervalo si se cumple que:**

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_1)$$

Veamos un ejemplo gráfico:

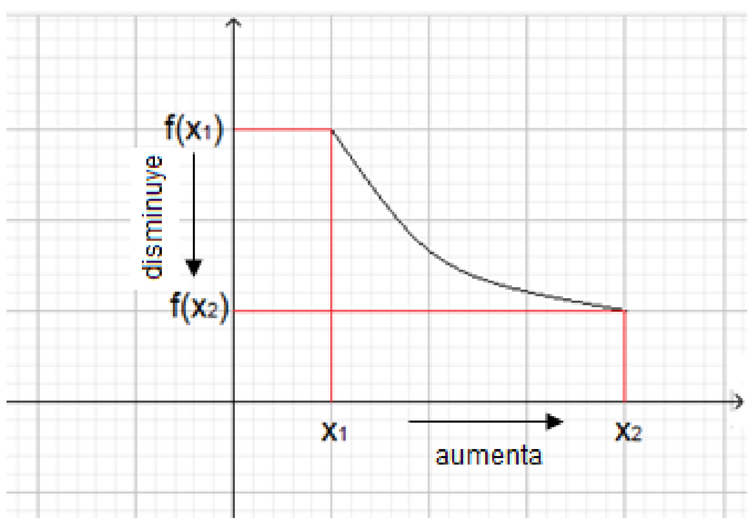


FUNCIÓN DECRECIENTE

A medida que aumenta el valor de x, disminuye el valor de y. La definición es la siguiente: **una función es decreciente en un intervalo si se cumple que:**

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_1)$$

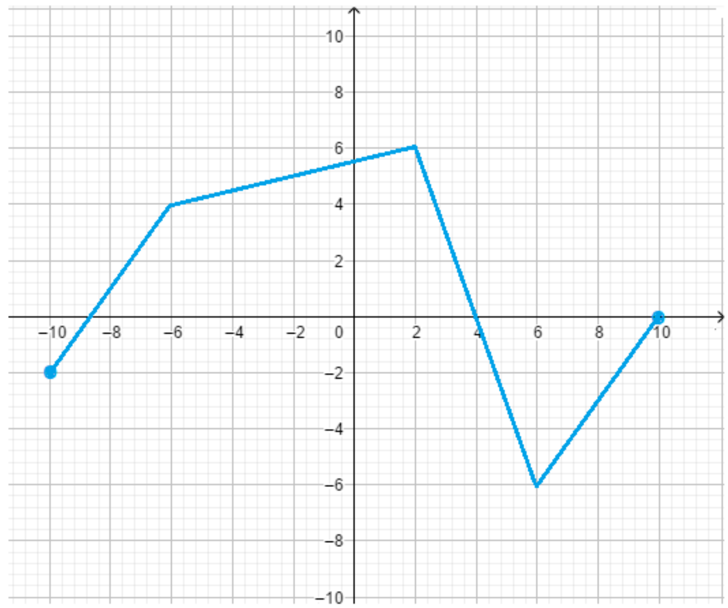
Veamos un ejemplo gráfico:



Date: / 04 / 2020

ACTIVIDAD PROPUESTA.

1. La figura representa la gráfica de una función f(x), de acuerdo a eso indique:



a) Dominio y Recorrido de la función

b) El valor de $f(-10) + f(4)$

c) Intervalos donde la función es creciente.

d) Intervalos donde la función es decreciente.

2. En las siguientes funciones, obtenga: su gráfica (use para ello Geogebra), dominio, recorrido e indique los intervalos donde son crecientes y donde son decrecientes

a) $f(x) = 3 - 2x$

b) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

d) $f(x) = 3^{(x-2)}$

e) $f(x) = \log(x)$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = |x|$

Date: / 04 / 2020

Respuestas

1a. Dom f: $[-10,10]$, Rec f $[-6,6]$

1b. $f(-10)+f(4)=-2$

1c. Creciente: $[-10,2]$; $[6,10]$

1d. Decreciente: $[2,6]$

2a. Dom f: $\mathbb{R}$, Rec f $\mathbb{R}$, decreciente monótona.

2b. Dom f: $\mathbb{R}$, Rec f $[2{,}88,+\infty[$, Decreciente: $[-\infty,-0{,}75]$, Creciente $[-0{,}75,+\infty]$

2c. $\text{Dom} f : R-\{-2\}$; $\text{Rec } f : R-\{1\}$, Creciente $]-\infty,-2[\ ,\ ]-2,+\infty[$

2d. Dom f: $\mathbb{R}$, Rec f $\mathbb{R}^+$, Monótona Creciente $[-\infty,+\infty]$

2e. Dom f: $]0,+\infty[$, Rec f $\mathbb{R}$, Monótona Creciente $]0,+\infty[$

2f. Dom f: $\mathbb{R}-\{-2,2\}$, Rec f $\mathbb{R}$, Decreciente: $]-\infty,-2[\ ;\ ]-2,2[\ ;\ ]2,+\infty[$

2g. Dom f: $\mathbb{R}$, Rec f $\mathbb{R}_0^+$, Decreciente: $[-\infty,-0]$, Creciente $[0,+\infty]$